school: Gewerbliche Schule Schwäbisch Hall Germany

subject: math

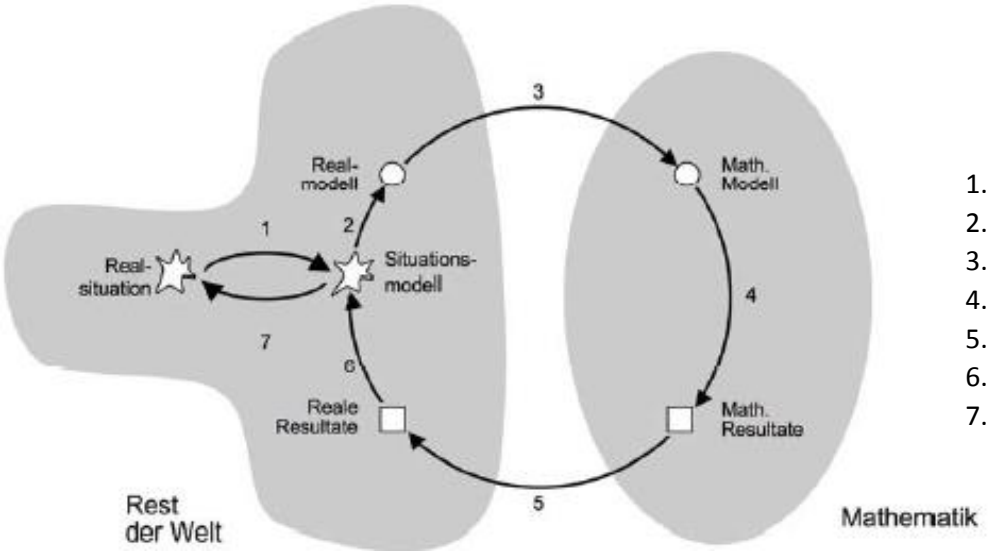
Summary of the lesson plan „Der Modellierungskreislauf anhand linearer und quadratischen Funktionsgleichungen“. The following material is still in German but the summary explains the content of the lesson.

The modeling cycle using linear and quadratic equations

The goal is that the SuS can apply the modeling cycle as a structuring method using (simple) linear and quadratic equations.

The students are first confronted with an entry-level example from their environment: "Bike tour from Schwäbisch Hall to Stuttgart". The task suggests the determination and use of a linear equation. Subsequently, the teacher points out to the students (meta-level) that they have gone through various steps in a modeling process as they complete the task. The students then have the task of putting six cards, each of which formulates a step in the modeling process, in the correct order and assigning the considerations made to the introductory example to the respective steps. Finally, in order to consolidate the new content, the students receive another application task (ideally as a basis for determining a quadratic equation), which they solve using the six steps of the modeling cycle.

The lesson is based on the following scheme of a modeling cycle:



1. understanding
2. simplifying/structuring
3. mathematize
4. work mathematically
5. interpret
6. validate
7. explain

Beispiel:

Radtour von Schwäbisch Hall nach Stuttgart

Passend zum Frühlingsanfang planst du zusammen mit deinem Freund eine Radtour von Schwäbisch Hall nach Stuttgart.

Nach zwei Stunden seid ihr noch 44 Kilometer von Stuttgart entfernt, nach vier Stunden dann noch etwa 16 Kilometer.

Wann werdet ihr vermutlich in Stuttgart ankommen?

Beispiel:
Radtour von Schwäbisch Hall nach Stuttgart

Passend zum Frühlingsanfang planst du zusammen mit deinem Freund eine Radtour von Schwäbisch Hall nach Stuttgart. Nach zwei Stunden seid ihr noch 44 Kilometer von Stuttgart entfernt, nach vier Stunden dann noch etwa 16 Kilometer.

Wann werdet ihr vermutlich in Stuttgart ankommen?

Arbeitsauftrag

1) Löse die Aufgabe für dich allein.
2) Vergleiche dein Ergebnis mit dem deines Partners. Überlegt euch anschließend:
   - Von welchen Annahmen seid ihr ausgegangen?
   - Durch welche Faktoren könnte die echte Ankunftszeit von der berechneten abweichen?
   - Wie könnte man zu einem sichereren Ergebnis kommen?

Beispiel:
Radtour von Schwäbisch Hall nach Stuttgart

Passend zum Frühlingsanfang planst du zusammen mit deinem Freund eine Radtour von Schwäbisch Hall nach Stuttgart. Nach zwei Stunden seid ihr noch 44 Kilometer von Stuttgart entfernt, nach vier Stunden dann noch etwa 16 Kilometer.

Wann werdet ihr vermutlich in Stuttgart ankommen?

Arbeitsauftrag

1) Löse die Aufgabe für dich allein.
2) Vergleiche dein Ergebnis mit dem deines Partners. Überlegt euch anschließend:
   - Von welchen Annahmen seid ihr ausgegangen?
   - Durch welche Faktoren könnte die echte Ankunftszeit von der berechneten abweichen?
   - Wie könnte man zu einem sichereren Ergebnis kommen?

Beispiel:
Radtour von Schwäbisch Hall nach Stuttgart

Passend zum Frühlingsanfang planst du zusammen mit deinem Freund eine Radtour von Schwäbisch Hall nach Stuttgart. Nach zwei Stunden seid ihr noch 44 Kilometer von Stuttgart entfernt, nach vier Stunden dann noch etwa 16 Kilometer.

Wann werdet ihr vermutlich in Stuttgart ankommen?

Arbeitsauftrag

1) Löse die Aufgabe für dich allein.

Lösungsvorschlag:
- Ansatz: lineare Funktionsgleichung zur Beschreibung der Situation
- Regressionsfunktion des Taschenrechners liefert die Funktionsgleichung $f(x) = -14x + 72$ oder Zwei-Punkte-Form ergibt: $f(x) = \frac{16-44}{4-2}(x-2) + 44 = -14x + 72$
- Aus $f(x) = 0$ folgt $x \approx 5{,}14$
- Die Radfahrer werden also nach etwa 5 Stunden und 8 Minuten in Stuttgart ankommen.

2) Vergleiche dein Ergebnis mit dem deines Partners. Überlegt euch anschließend:

– Von welchen Annahmen seid ihr ausgegangen?

Die Radfahrer fahren die gesamte Strecke über gleich schnell.

– Durch welche Faktoren könnte die echte Ankunftszeit von der berechneten abweichen?

Pausen, Ermüdung, Hügel, Unfall, …

– Wie könnte man zu einem sichereren Ergebnis kommen?

Durch mehr Messdaten, vor allem gegen Ende der Fahrt.

Modellierungskreislauf

Aufgabe verstehen

Welche Informationen sind gegeben und nach was ist gefragt?

Passendes Modell finden

Welche Strukturen/Verhältnisse/Regelmäßigkeiten sind erkennbar? Welche Annahmen können getroffen werden?

Modell mathematisch formulieren

Wodurch kann ich das gefundene Modell mathematisch erfassen/ausdrücken?

Modell mathematisch lösen

Welche mathematischen Werkzeuge kenne ich, um die Lösung des mathematischen Modells zu bestimmen? Wie lautet die Lösung?

Lösung interpretieren

Wie ist die mathematische Lösung in Bezug auf die gestellte Aufgabe zu deuten?

Modell bewerten

Wie wahrscheinlich ist das Ergebnis?
Ist das überlegte Modell für die Aufgabe geeignet?

Modellierungskreislauf

Aufgabe verstehen

Passendes Modell finden

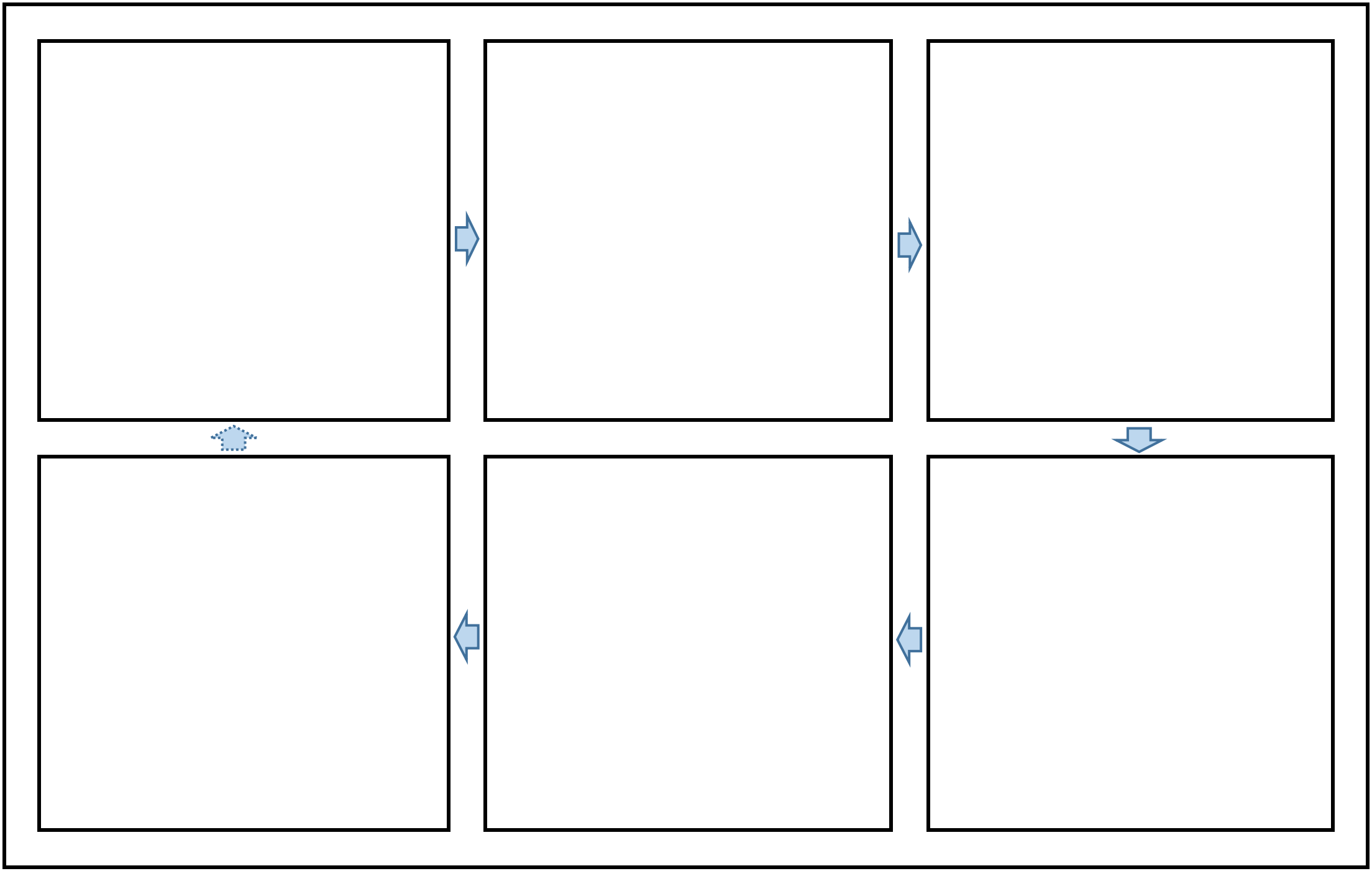
Modell mathematisch formulieren

Modell mathematisch lösen

Lösung interpretieren

Modell bewerten

Modellierungskreislauf



Modellierungskreislauf – Übungsaufgabe (freier Fall)

Arbeitsauftrag 1

Füllt die Kästchen des Modellierungskreislaufs (auf der Rückseite) anhand folgender Aufgabe aus. Vergesst nicht, das Modell anschließend zu bewerten (letztes Kästchen).
Falls ihr einen kleinen Tipp benötigt: Vorne am Pult liegt einer bereit.

Bei einem Fallschirmsprung werden ausgehend vom Absprung aus dem Flugzeug (0 m) jeweils nach einer Sekunde die zurückgelegten Höhenmeter eines Fallschirmspringers gemessen. Nach einer Sekunde werden 4,8 m gemessen, nach zwei Sekunden 18,5 m. **Wie tief ist der Fallschirmspringer demnach nach 20 s gefallen?**

Arbeitsauftrag 2

Die physikalische Formel für die zurückgelegte Strecke (in Abhängigkeit der Zeit) im freien Fall lautet:

$$f(x) = \frac{1}{2}\, g\, x^2,$$

wobei $g = 9{,}81\ \left[\frac{m}{s^2}\right]$ *ist.*

a) Wodurch unterscheidet sich diese Formel von eurer Funktionsgleichung aus Arbeitsauftrag 1?
b) Zu welchem Ergebnis kommt man bei obiger Aufgabe mit dieser Formel (ohne die Messdaten)?
c) Wie kamen die Wissenschaftler zu dieser Formel, insbesondere zu dem Wert für g?
d) Tatsächlich hat der Fallschirmspringer nach 20 Sekunden nur 1000 m zurückgelegt.
Wie kommt es zu diesem Unterschied zwischen berechnetem und tatsächlichem Wert?

Tipp zur Fallschirmsprung-Aufgabe

Überlegt zunächst, ob ihr für die Aufgabe eine lineare oder eine quadratische Funktionsgleichung verwenden möchtet.
Es ergeben sich aus der Aufgabe drei Funktionswerte:
$f(0) = 0$
$f(1) = 4{,}8$
$f(2) = 18{,}5$

Tipp zur Fallschirmsprung-Aufgabe

Überlegt zunächst, ob ihr für die Aufgabe eine lineare oder eine quadratische Funktionsgleichung verwenden möchtet.
Es ergeben sich aus der Aufgabe drei Funktionswerte:
$f(0) = 0$
$f(1) = 4{,}8$
$f(2) = 18{,}5$

Tipp zur Fallschirmsprung-Aufgabe

Überlegt zunächst, ob ihr für die Aufgabe eine lineare oder eine quadratische Funktionsgleichung verwenden möchtet.
Es ergeben sich aus der Aufgabe drei Funktionswerte:
$f(0) = 0$
$f(1) = 4{,}8$
$f(2) = 18{,}5$

Tipp zur Fallschirmsprung-Aufgabe

Überlegt zunächst, ob ihr für die Aufgabe eine lineare oder eine quadratische Funktionsgleichung verwenden möchtet.
Es ergeben sich aus der Aufgabe drei Funktionswerte:
$f(0) = 0$
$f(1) = 4{,}8$
$f(2) = 18{,}5$

Modellierungskreislauf – Übungsaufgabe (freier Fall)

Arbeitsauftrag 1

Füllt die Kästchen des Modellierungskreislaufs anhand folgender Aufgabe aus. Vergesst nicht, das Modell anschließend zu bewerten (letztes Kästchen).
Falls ihr einen kleinen Tipp benötigt: Vorne am Pult liegt einer bereit.

Bei einem Fallschirmsprung werden ausgehend vom Absprung aus dem Flugzeug (0 m) jeweils nach einer Sekunde die zurückgelegten Höhenmeter eines Fallschirmspringers gemessen. Nach einer Sekunde werden 4,8 m gemessen, nach zwei Sekunden 18,5 m.
Wie tief ist der Fallschirmspringer demnach nach 20 s gefallen?

Arbeitsauftrag 2

Die physikalische Formel für die zurückgelegte Strecke (in Abhängigkeit der Zeit) im freien Fall lautet:

$$f(x) = \frac{1}{2}\, g\, x^2,$$

wobei $g = 9{,}81\ \left[\frac{m}{s^2}\right]$ *ist.*

a) Wodurch unterscheidet sich diese Formel von eurer Funktionsgleichung?
- Falls zuvor linear modelliert wurde: dadurch, dass die Formel quadratisch ist.
- Falls zuvor quadratisch modelliert wurde: durch die Parameter vor x^2 bzw. vor x.

b) Zu welchem Ergebnis kommt man bei obiger Aufgabe mit dieser Formel (ohne die Messdaten)?
- $f(20) = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 20^2 = 1962$
- Der Fallschirmspringer ist demnach nach 20 s 1962 m tief gefallen.

c) Wie kamen die Wissenschaftler zu dieser Formel, insbesondere zu dem Wert für *g*?
Sie entwickelten aufgrund von Messwerten ein **Modell**, das die Situation beschreibt. (Eigentlich wurden diese Messwerte schon im Rahmen einer bestimmten Theorie, d.h. eines Modells, interpretiert.) Durch immer genauere Messungen wurde der Beschleunigungsfaktor *g* bestimmt.

d) Tatsächlich hat der Fallschirmspringer nach 20 Sekunden nur 1000 m zurückgelegt.
Wie kommt es zu diesem Unterschied zwischen berechnetem und tatsächlichem Wert?
Durch Luftwiderstand. Dieser wächst mit zunehmender Geschwindigkeit, bis der Fallschirmspringer irgendwann mit konstanter Geschwindigkeit fällt. Durch unterschiedliche Positionen kann der Fallschirmspringer diese Komponente beeinflussen.

Thema: Modellierungskreislauf anhand linearer und quadratischer Funktionsgleichungen	Klasse: TG11/1
Stunde: 3. Stunde (09:40 Uhr bis 10:40 Uhr)	Datum: 11.03.14

Lernziele und Kompetenzen

Neben dem Stundenziel und der Hauptkompetenz, die im Entwurf genannt sind, werden folgende Teilziele verfolgt: Die SuS …

1) … können für eine (einfache) realitätsbezogene Aufgabe ein Modell finden, dieses mathematisch formulieren und lösen und die Lösung entsprechend interpretieren.
2) … können ein von ihnen verwendetes (einfaches) Modell reflektieren.
3) … haben einen transparenten Überblick über die verschiedenen Phasen eines Modellierungsprozesses.
4) … können ihre Überlegungen zur Lösung einer Modellierungsaufgabe den einzelnen Phasen des Modellierungskreislaufs zuordnen.

Durch die ganze Stunde zieht sich ebenso das Teilziel, die Bestimmung und Verwendung linearer und quadratischer Funktionsgleichungen zu festigen. Aufgrund der Forderung nach einem transparenten vollständigen Modellierungskreislauf werden grundsätzlich alle Kompetenzen K1 – K6 gefördert (vgl. Entwurf).

Verlaufsplanung

Zeit	Inhalt	erwartetes Schülerverhalten	Methode/ Sozialform	Medien	Ziel
5 min	<u>Eröffnung</u> - Begrüßung - zum Einstiegsbeispiel führende, schülernahe Frage				Motivation
	<u>Einstieg:</u> Radtour von Schwäbisch Hall nach Stuttgart	Die SuS überlegen, wie die gestellte Aufgabe zu lösen ist.	Lehrer-Schüler-Gespräch	Dokumenten-kamera, Einstiegs-beispiel	1)
5-10 min	<u>Erarbeitung1</u> Radtour von Schwäbisch Hall nach Stuttgart	Die SuS bearbeiten die gestellte Aufgabe und reflektieren anschließend mit ihrem Partner ihre Vorgehensweise.	Ich-Du-Wir-Prinzip: Einzelarbeit (Ich), Partnerarbeit (Du)	Aufgabenblatt	1), 2)
5 min	<u>Sicherung1</u> Besprechung	Ein/e Schüler/in präsentiert sein/ihr Ergebnis. Die restlichen SuS vergleichen, ergänzen und korrigieren gegebenenfalls.	Schülerpräsentation (Wir)	Dokumenten-kamera	2)
	<u>Fokussierung</u>	(Die L benennt das Thema der heutigen Stunde.)			Transparenz

10-15 min	Erarbeitung2 Modellierungskreislauf	Die SuS bringen die sechs Kärtchen in die richtige Reihenfolge und ordnen dann ihre Arbeitsschritte den einzelnen Phasen des Modellierungskreislaufes zu.	Einzelarbeit	Kärtchen	3), 4)
10 min	Sicherung2 Besprechung	Ein/e Schüler/in präsentiert seine/ihre Ordnung der Kärtchen. Anschließend diktieren einzelne SuS ihre Notizen. Die restlichen SuS vergleichen, ergänzen und korrigieren.	Schülerpräsentation, Lehrer-Schüler-Gespräch	Dokumenten-kamera	3), 4)
10-15 min	Übung/Festigung Fallschirmsprung-Aufgabe	Die SuS füllen die Kästchen des Modellierungskreislaufes anhand der Fallschirmsprung-Aufgabe aus (Arbeitsauftrag 1). Eventuell holen sie sich den bereit gelegten Tipp ab. Puffer (für die schnellen SuS): Arbeitsauftrag 2	Partnerarbeit	Aufgabenblatt, Arbeitsblatt, Tipp	1), 2), 3), 4)
5-10 min	Sicherung Besprechung	Ein/e Schüler/in präsentiert sein/ihr Ergebnis. Die restlichen SuS vergleichen, ergänzen und korrigieren gegebenenfalls.	Schülerpräsentation, Unterrichtsgespräch	Dokumenten-kamera	1), 2), 3), 4)
30 min	Übung/Festigung	Die SuS bearbeiten Arbeitsauftrag 2 und eine weitere Modellierungsaufgabe.	Gruppenarbeit (3er)	Aufgabenblatt, Arbeitsblatt	